$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = -x & \rightsquigarrow & u(x) = -\frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \text{Log}x & \rightsquigarrow & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\text{Log}x\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2.$$

b- Comme $S_\Delta[(C_{\varphi^{-1}})] = (C_\varphi)$ et $S_\Delta[(D)] = (D)$ alors la mesure de l'aire du domaine limité par (C_φ), $(C_{\varphi^{-1}})$ et (D) est égale à deux fois l'aire du domaine limité par (C_φ) et (D) qui est égale à $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)$.

Ainsi $S = 2\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = 2\lim\limits_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}a^2\text{Log}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2\right]$

$$= 2\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}a.\underbrace{a\text{Log}a} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a^2\right] = \frac{1}{2}.$$

3/a- $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$u_{n-1}f'(u_n) = f(u_{n-1}) \Leftrightarrow u_{n-1}\text{Log}(u_n) = u_{n-1}\text{Log}(u_{n-1}) - u_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \text{Log}(u_n) = \text{Log}(u_{n-1}) - 1$$
$$\Leftrightarrow u_n = e^{\text{Log}(u_{n-1})-1}$$
$$\Leftrightarrow u_n = e^{-1}u_{n-1}$$

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison e^{-1} et $u_0 = e$

$\overset{th}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0(e^{-1})^n = e^{-n+1}$.

b- $\omega(0,0), M_k(u_k; f(u_k))$ et $M_{k+1}(u_{k+1}; f(u_{k+1}))$.

$$s_k = \frac{\omega M_k \times M_{k+1}H}{2}$$

avec H le projeté orthogonal de M_{k+1} sur (ωM_k)

$\Rightarrow M_{k+1}H = d[M_{k+1}; (\omega M_k)]$ la distance entre M_{k+1} et (ωM_k)

- $\omega M_k = \sqrt{(u_k - 0)^2 + (f(u_k) - 0)^2} = \sqrt{u_k^2 + [f(u_k)]^2}$.
- Posons $y = ax + b$ l'équation de la droite (ωM_k).

$$\begin{cases} 0 = a \times 0 + b & \text{car } \omega(0,0) \in (\omega M_k) \\ f(u_k) = au_k + b & \text{car } M_k(u_k; f(u_k)) \in (\omega M_k) \end{cases}$$